4 YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİF. DENKLEMLER

İkinci mertebeden lineer dif. denklemlerin teorik yapısı ve çözüm yöntemleri, üçüncü mertebeden ve daha yüksek mertebeden lineer dif. denklemlere genişletilebilir.

4.1 n. mertebeden Lineer Denklemlerin Genel Teorisi

n. mertebeden bir dif. denklem

$$P_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + P_1(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}\frac{dy}{dt} + P_n(y) = G(t) \qquad (4.1)$$

formundadır.

$P_0, P_1, \ldots, P_n$ ve G'yi, $I: \alpha < t < \beta$ aralığında reel değerli, sürekli ve $P_0 \neq 0$ olarak düşünüyoruz. (4.1)'i P_0'a bölersek

$$L(y) = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t) \qquad (4.2)$$

formu elde edilir.

Başlangıç değer problemi bu denklemi sağlayan ve

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (4.3)$$

başlangıç koşullarını sağlayan tek bir çözümdür.

Teorem: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ve g, I açık aralığında sürekli fonksiyonlar ise (4.2) denklemini ve (4.3) başlangıç koşullarını sağlayan yalnız bir $y = \phi(t)$ fonksiyonu vardır. Bu çözüm bütün I aralığı boyunca sağlanır.

Homojen denklemler

Eğer $y_1, y_2, \ldots, y_n$,

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n(t)y = 0 \qquad (4.4)$$

homojen denkleminin çözümleri ise bunların keyfi lineer birleşimi

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \qquad (4.5)$$

(4.4)'ün bir çözümüdür.

Soru: (4.4) dif. denkleminin her çözümü $y_1, y_2, \ldots, y_n$'lerin bir birleşimi olarak ifade edilebilir mi? Eğer $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t_0) \neq 0$ ise bu doğrudur. Bunu görmek için; keyfi $t_0 \in I$ ve keyfi seçilen $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ için

$$\begin{aligned} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) + \cdots + c_ny_n(t_0) &= y_0 \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) + \cdots + c_ny_n'(t_0) &= y_0' \\ &\;\;\vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2y_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(t_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \qquad (4.6)$$

denklemini sağlayacak $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitlerini belirleyebilmemiz gerekir. (4.6) denkleminin keyfi $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ değerleri için çözümünün olmasının gerek ve yeter şartı $t = t_0$ noktasında

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Wronskiyanının sıfırdan farklı olmasıdır.

Teorem: I açık aralığında, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ fonksiyonları sürekli, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (4.4) denkleminin çözümleri ve en azından bir $t \in I$ noktasında $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t) \neq 0$ ise (4.6) denkleminin her çözümü $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çözümlerinin bir lineer birleşimi olarak ifade edilebilir.

Wronskiyanın sıfırdan farklı olduğu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çözümlerine temel çözüm kümesi denir. Herhangi bir temel çözümün keyfi lineer birleşime genel çözüm denir.

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonlarına, $\forall t \in I$ için

$$k_1f_1 + k_2f_2 + \cdots + k_nf_n = 0$$

denklemini sağlayan hepsi birden sıfır olmayan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sabitleri varsa, lineer bağımlı denir. Eğer

$$k_1f_1 + k_2f_2 + \cdots + k_nf_n = 0$$

denklemini yalnız $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ sabitleri sağlıyorsa $f_1, f_2, \ldots, f_n$'e lineer bağımsız denir.

$y_1, y_2, \dots, y_n$ (4.6)'nın çözümleri ise $y_1, y_2, \dots, y_n$'nin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart bir $t_0 \in I$ noktasında

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(t_0) \neq 0$$

olmasıdır.

Homojen Olmayan Denklemler:

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \dots + p_n(t) y = g(t) \qquad (4.2)$$

homojen olmayan denklemin iki çözümü Y_1 ve Y_2 ise

$$L(Y_1 - Y_2)(t) = L_1(Y_1)(t) - L(Y_2)(t) = g(t) - g(t) = 0$$

olduğundan, $Y_1 - Y_2$ homojen kısmın çözümüdür. Homojen kısmın herhangi çözümü $y_1, y_2, \dots, y_n$ temel çözüm kümesinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğinden (4.2)'nin herhangi bir çözümü, Y homojen olmayan kısmın bir özel çözümü olmak üzere

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) + Y(t) \qquad (4.7)$$

dir. (4.7)'ye homojen olmayan dif. denklemin genel çözümü denir.

Örnekler: Aşağıdaki fonksiyonların lineer bağımlı olup olmadıklarını belirleyiniz. Lineer bağımlı ise aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

a) $f_1(t) = 2t - 3$, $f_2(t) = t^2 + 1$, $f_3(t) = 2t^2 - 1$

b) $f_1(t) = 5$, $f_2(t) = \sin^2 t$, $f_3(t) = \cos 2t$

a)
$$W(f_1, f_2, f_3)(t) = \begin{vmatrix} 2t-3 & t^2+1 & 2t^2-1 \\ 2 & 2t & 4t \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (2t-3)\begin{vmatrix} 2t & 4t \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} t^2+1 & 2t^2-1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2(4t^2 + 4 - 4t^2 + 2) = -12 \neq 0$$

olduğundan f_1, f_2, f_3 lineer bağımsızdır.

b)
$$W(f_1, f_2, f_3)(t) = \begin{vmatrix} 5 & \sin^2 t & \cos 2t \\ 0 & \sin 2t & -2\sin 2t \\ 0 & 2\cos 2t & -4\cos 2t \end{vmatrix} = 0$$

$$k_1 5 + k_2 \sin^2 t + k_3 \cos 2t = 0$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

$$k_1 = \frac{1}{10} \quad k_2 = -1 \quad k_3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 t = \frac{1}{10} \cdot 5 - \frac{1}{2}\cos 2t$$

2) $1, x, x^3$'ün $xy''' - y'' = 0$ dif. denklemini sağladığını gösteriniz ve Wronskiyanını bulunuz.

$y_1(x) = 1$	$y_2(x) = x$	$y_3(x) = x^3$
$y_1' = 0$	$y_2' = 1$	$y_3' = 3x^2$
$y_1'' = 0$	$y_2'' = 0$	$y_3'' = 6x$
$y_1''' = 0$	$y_2''' = 0$	$y_3''' = 6$
$xy_1''' - y_1'' = 0$	$xy_2''' - y_2'' = 0$	$xy_3''' - y_3'' = x.6 - 6x = 0$

$$W(1, x, x^3) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 0 & 1 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6x \end{vmatrix} = 6x$$

4.2 Sabit Katsayılı Homojen Denklemler

$a_0, a_1, \dots, a_n$ reel sabitler olmak üzere

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (4.8)$$

n. mertebeden lineer homojen dif. denklemin çözümünü 2. mertebeden dif. denklemlerde olduğu gibi $y = e^{rt}$ şeklinde arayalım. Bu durumda (4.8) denklemi

$$L(e^{rt}) = e^{rt}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) = e^{rt} Z(r)$$

şekline indirgenir. Burada

$$Z(r) = a_0 r^n + \dots + a_n$$

dir.

$Z(r)=0$ denklemini sağlayan r'ler için $L(e^{rt})=0$ ve $y=e^{rt}$, (4.8)' in bir çözümüdür. $Z(r)$ polinomuna <u>karakteristik polinom</u> ve $Z(r)=0$' a (4.8) dif. denkleminin <u>karakteristik denklemi</u> denir.

<u>Reel ve birbirinden farklı kökler:</u>

$Z(r)=0$ denkleminin reel ve birbirinden farklı $r_1, r_2, \dots, r_n$ kökü varsa $e^{r_1 t}, \dots, e^{r_n t}$, (4.8) denkleminin çözümleridir. Bu fonksiyonlar lineer bağımsız olduğundan (4.8)' in genel çözümü

$$y=c_1 e^{r_1 t}+c_2 e^{r_2 t}+\dots+c_n e^{r_n t}$$

dir.

<u>Örnekler:</u> 1) $y^{IV}-5y''+4y=0$ dif. denkleminin genel çöz. bul.

$y=e^{rt}$ şeklinde çözüm arandığında karakteristik denklem

$$r^4-5r^2+4=0 \Rightarrow (r^2-4)(r^2-1)=0 \quad r^2-1=0 \to r_1=1,\ r_2=-1; \quad r^2-4=0 \to r_3=2,\ r_4=-2$$

dir. Çözüm

$$y=c_1 e^{t}+c_2 e^{-t}+c_3 e^{2t}+c_4 e^{-2t}$$

2) $2y'''-4y''-2y'+4y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=5$, $y''(0)=5$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$y=e^{rt}$ şeklinde çözüm arandığında karakteristik denklem

$$2r^3-4r^2-2r+4=0$$

olur. $r^3-2r^2-r+2=0 \Rightarrow (r-1)(r^2-r-2)=0$

$$\Rightarrow (r-1)(r+1)(r-2)=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=-1,\ r_3=2$$

Çözüm

$$y=c_1 e^{t}+c_2 e^{-t}+c_3 e^{2t}$$

dir.

$$y'=c_1 e^{t}-c_2 e^{-t}+2c_3 e^{2t}$$

$$y''=c_1 e^{t}+c_2 e^{-t}+4c_3 e^{2t}$$

$t=0,\ y=2 \qquad 2=c_1+c_2+c_3$

$t=0,\ y'=5 \qquad 5=c_1-c_2+2c_3 \quad \Rightarrow c_3=1,\ c_1=2,\ c_2=-1$

$t=0,\ y''=5 \qquad 5=c_1+c_2+4c_3$

$$y=2e^{t}-e^{-t}+e^{2t}$$

<u>Kompleks kökler:</u>

$Z(r)=0$ denkleminin kökleri $\lambda \pm i\mu$ gibi kompleks eşlenik kök içeriyorsa çözüm 2. mertebeden dif. denklemlerde olduğu gibi $e^{\lambda t}\cos\mu t$ ve $e^{\lambda t}\sin\mu t$ şeklindedir. $a_0, \dots, a_n$ katsayıları reel olduğundan kompleks kök varsa eşleneğide kök olmalıdır.

<u>Örnekler:</u> 1) $y^{V}-y=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bul.

$y=e^{rt}$ şeklinde çözüm arandığında karakteristik denklem

$$r^4-1=0$$

dır.

$$r^4-1=(r^2-1)(r^2+1)=(r-1)(r+1)(r^2+1)=0$$

$$r_1=1,\ r_2=-1,\ r_{3,4}=\pm i \quad (\lambda=0,\ \mu=1)$$

Genel çözüm

$$y=c_1 e^{t}+c_2 e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t$$

dır.

2) $y'''+y'=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$ başlangıç değer problemini çözünüz. Çözümün grafiğini çiziniz ve $t\to\infty$ çözümün nasıl davrandığını söyleyiniz.

$y = e^{rt}$, karakteristik denklem

$$r^3 + r = 0 \Rightarrow r(r^2+1) = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_{2,3} = \pm i \end{cases}$$

ve genel çözüm

$$y = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t$$

dır.

$$y' = -c_2 \sin t + c_3 \cos t$$

$$y'' = -c_2 \cos t - c_3 \sin t$$

$t=0,\ y=0 \Rightarrow 0 = c_1 + c_2$

$t=0,\ y'=1 \Rightarrow 1 = c_3 \qquad \Rightarrow c_1 = 2,\ c_2 = -2\ \ c_3 = 1$

$t=0,\ y''=2 \Rightarrow 2 = -c_2$

$$y = 2 - 2\cos t + \sin t$$

dır.

$t \to \infty$'da fonksiyon sürekli salınım yapar.

$$y = 2 - 2\cos t + \sin t$$